2020年度

**MB**

# 数　　学

3月12日（木）
【後期日程】　理　学　部（数学科）　12：20～14：50

## 注意事項

### 試験開始前

1　**監督者の指示があるまで，問題冊子，解答用紙に手を触れてはいけません。**

2　**監督者の指示に従って，全部の解答用紙（５枚）に受験番号を記入しなさい。**

### 試験開始後

3　この問題冊子は，５ページあります。はじめに，問題冊子，解答用紙を確かめ，枚数の不足や，印刷の不鮮明なもの，ページの落丁・乱丁があった場合は，手をあげて監督者に申し出なさい。

4　**解答はすべて解答用紙に記入しなさい。**

5　解答スペースが不足するときは，解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし，その場合は，表面に「裏面へつづく」と明記しなさい。

6　問題は，声を出して読んではいけません。

7　各問の配点は，比率（%）で表示してあります。

### 試験終了後

8　問題冊子は，必ず持ち帰りなさい。

**1** 自然数 $n$ に対して，$A_n$, $B_n$ を数直線上の点とし，点 $A_n$ の座標を $a_n$，点 $B_n$ の座標を $b_n$ で表す。ただし，$a_1 = 0$，$b_1 = 1$ とし，点 $A_{n+1}$ を点 $A_n$ と点 $B_n$ の中点，点 $B_{n+1}$ を線分 $A_nB_n$ を $4:1$ に外分する点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_2$, $b_2$, $a_3$, $b_3$ をそれぞれ求めよ。

(2) $a_{n+1}$ を $a_n$, $b_n$ を用いて表せ。

(3) $b_{n+1}$ を $a_n$, $b_n$ を用いて表せ。

(4) $b_n - a_n$ を $n$ を用いて表せ。

(5) $a_n$ を $n$ を用いて表せ。

（配点 20 %）

**2** 座標空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面上に 3 点 $A(\cos\theta, \sin\theta, 0)$, $B(\cos(-\theta), \sin(-\theta), 0)$, $C(x, y, z)$ をとる。ただし，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $z > 0$ であり，$\angle COA = \angle COB$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle COA = \alpha$ とおく。このとき，$x, y, z$ をそれぞれ $\alpha, \theta$ を用いて表せ。

(2) $\angle COA = \angle AOB$ かつ $AC = \frac{\sqrt{10}}{2}$ のとき，$x, y, z$ をそれぞれ求めよ。

（配点 20 %）

**3** 複素数 $\alpha$ は $\alpha^5 = 1, \alpha \fallingdotseq 1$ を満たしている。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 等式 $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)$ が実数であることを示し，その値を求めよ。

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数 $\theta$ に対して，$z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおく。このとき，等式

$$|1-z| = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

が成り立つことを示せ。ただし，$i$ は虚数単位を表す。

(4) $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}$ の値を求めよ。

（配点 20 %）



◇M8(148—40)

**4** $e$ を自然対数の底とし，関数 $f(x)=(2x-1)e^{-\frac{x}{3}}$ を考える。$y=f(x)$ のグラフを $C$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べ，そのグラフの概形を描け。必要ならば，$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ を用いてよい。

(2) $C$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式を $a$ を用いて表せ。

(3) 原点を通る $C$ の接線をすべて求めよ。

(4) (3) で求めた接線と $C$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

（配点 20 %）

$\boxed{5}$ $p,\ q$ を異なる素数とするとき，次の各命題が真であることを証明せよ。

(1) ${}_pC_1,\ {}_pC_2,\ \cdots,\ {}_pC_{p-1}$ はいずれも $p$ の倍数である。

(2) すべての自然数 $n$ に対して $n^p - n$ は $p$ の倍数である。

(3) すべての自然数 $n$ に対して $n^{(p-1)(q-1)+1} - n$ は $pq$ の倍数である。

（配点 20 %）



◇M8 (148—42)