2021年度

MB

数　　学

3月12日（金）　　理　学　部（数学科）　　12：20～14：50
【後期日程】

注意事項

試験開始前

1　監督者の指示があるまで，問題冊子，解答用紙に手を触れてはいけません。

2　監督者の指示に従って，全部の解答用紙（５枚）に受験番号を記入しなさい。

試験開始後

3　この問題冊子は，５ページあります。はじめに，問題冊子，解答用紙を確かめ，枚数の不足や，印刷の不鮮明なもの，ページの落丁・乱丁があった場合は，手をあげて監督者に申し出なさい。

4　解答はすべて各問に対応した解答用紙に記入しなさい。

5　解答スペースが不足するときは，解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし，その場合は，表面に「裏面へつづく」と明記しなさい。

6　問題は，声を出して読んではいけません。

7　各問の配点は，比率（%）で表示してあります。

試験終了後

8　問題冊子は，必ず持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ α を $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\sin 2\alpha$ の値を求めよ。

(2) $\sin\dfrac{5}{12}\pi$ の値を求めよ。

(3) α と $\dfrac{5}{24}\pi$ の大小を比較せよ。

（配点 20 %）

2 座標平面において，原点 O を中心とする半径 1 の円を C，円 C とその内部からなる図形を K とする。円 C の外部に点 A をとり，線分 OA と円 C との交点を B とする。$\mathrm{OA} = t$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と t を用いて表せ。

(2) K 上のすべての点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} \leqq 0$ が成り立つことを示せ。

(3) Q を K 上の点とする。点 Q が次の条件 (*) を満たすならば，点 Q は点 B に一致することを示せ。

(*) K 上のすべての点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{QA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP}} \leqq 0$

(4) K 上のすべての点 P に対して，

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \geqq \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するのは点 P が点 B に一致するとき，かつそのときに限ることを示せ。

(配点 20 %)

3 媒介変数 $t\left(0 \leqq t < \dfrac{\pi}{4}\right)$ を用いて

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

で表される曲線を C とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{dy}{dt}$ を t を用いて表せ。

(2) $\dfrac{dy}{dx}$ を t を用いて表せ。

(3) $t = \dfrac{\pi}{6}$ のときの曲線 C 上の点を P とする。このとき，点 P における曲線 C の接線 ℓ の方程式を求めよ。

(4) (3) の点 P と直線 ℓ において，曲線 C は点 P を除いて直線 ℓ の上側にあることを示せ。

(5) 曲線 C と (3) で求めた直線 ℓ，および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(配点 20 %)

◇M10(558—53)

4 r を正の実数とし，複素数平面における原点Oを中心とする半径 r の円を C とする。0でない複素数 z に対して，Oから点 $\mathrm{P}(z)$ に向かう半直線上の点 $\mathrm{Q}(w)$ が $|w|\cdot|z| = r^2$ を満たしている。このとき，次の問いに答えよ。

(1) w を r と z を用いて表せ。

(2) 点Pが円 C の内部にあるならば，点Qは円 C の外部にあることを示せ。

(3) 実軸上の点 $\mathrm{R}\left(\dfrac{r}{2}\right)$ を通り，複素数平面の実軸に垂直な直線を ℓ とする。点Pが直線 ℓ 上を動くとき，点Qがえがく図形を求め，複素数平面上に図示せよ。

（配点 20 %）

$\boxed{5}$ 座標平面上に2点 A$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, B$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ をとり，点Bを中心とする半径2の円を C とする。点Aと円 C 上の動点Qを結ぶ線分AQの垂直二等分線が線分BQと交わる点をPとし，点Qが円 C 上を1周するときの点Pのえがく曲線を E とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 E が2点A, Bを焦点とする楕円になることを示し，その方程式を求めよ。

(2) 曲線 E 上の点Pに対して，BP $= r$，$\angle$PBA $= \alpha$ とするとき，r を α を用いて表せ。

(3) 点Bを通る直線と曲線 E との交点を D_1, D_2 とする。ただし，3点A, D_1, D_2 は同一直線上にはないとする。このとき，$\angle D_1BA = \theta$ とおいて $\triangle AD_1D_2$ の面積を θ を用いて表せ。

(4) (3) における $\triangle AD_1D_2$ の面積の最大値を求めよ。

(配点 20 %)