

2021年度

MC

数 学

3月12日(金)

教 育 学 部 (数学教育専修)

12 : 20 ~ 13 : 40

【後 期 日 程】

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れてはいけません。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(3枚)に受験番号を記入しなさい。

試験開始後

- 3 この問題冊子は、3ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出なさい。
- 4 解答はすべて各問に対応した解答用紙に記入しなさい。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏面へつづく」と明記しなさい。
- 6 問題は、声を出して読んではいけません。
- 7 各問の配点は、比率(%)で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) $0 \leq x \leq 1$ のとき, 不等式

$$1 - x \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 不等式

$$\pi - 2 \leq \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-\tan^2 x} dx \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ。

(配点 30 %)

2 座標平面上に2点 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ をとり, 点 B を中心とする半径2の円を C とする。点 A と円 C 上の動点 Q を結ぶ線分 AQ の垂直二等分線が線分 BQ と交わる点を P とし, 点 Q が円 C 上を1周するときの点 P のえがく曲線を E とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 E が2点 A, B を焦点とする楕円になることを示し, その方程式を求めよ。
- (2) 曲線 E 上の点 P に対して, $BP = r$, $\angle PBA = \alpha$ とするとき, $r = \frac{1}{4 - 2\sqrt{3}\cos\alpha}$ となることを示せ。
- (3) 点 B を通る直線と曲線 E との交点を D_1, D_2 とする。ただし, 3点 A, D_1, D_2 は同一直線上にはないとする。このとき, $\angle D_1BA = \theta$ とおいて $\triangle AD_1D_2$ の面積を θ を用いて表せ。
- (4) (3) における $\triangle AD_1D_2$ の面積の最大値を求めよ。

(配点 35%)

3 r を正の実数とし、複素数平面における原点 O を中心とする半径 r の円を C とする。0 でない複素数 z に対して、 O から点 $P(z)$ に向かう半直線上の点 $Q(w)$ が $|w| \cdot |z| = r^2$ を満たしている。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) w を r と z を用いて表せ。
- (2) 点 P が円 C の内部にあるならば、点 Q は円 C の外部にあることを示せ。
- (3) 実軸上の点 $R\left(\frac{r}{2}\right)$ を通り、複素数平面の実軸に垂直な直線を l とする。点 P が直線 l 上を動くとき、点 Q がえがく図形を求め、複素数平面上に図示せよ。

(配点 35 %)