2021年度

M２　数　学

2月25日(木) 【前 期 日 程】	情 報 学 部 (情報科学科)	9：30～11：30
	理 学 部 (物理学科, 化学科, 創造理学コース)	9：50～11：50
	工 学 部	9：00～11：00

注 意 事 項

試験開始前

1 監督者の指示があるまで，問題冊子，解答用紙に手を触れてはいけません。

2 監督者の指示に従って，全部の解答用紙(４枚)に受験番号を記入しなさい。

試験開始後

3 この問題冊子は，４ページあります。はじめに，問題冊子，解答用紙を確かめ，枚数の不足や，印刷の不鮮明なもの，ページの落丁・乱丁があった場合は，手をあげて監督者に申し出なさい。

4 **解答はすべて各問に対応した解答用紙に記入しなさい。**

5 解答スペースが不足するときは，解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし，その場合は，表面に「裏面へつづく」と明記しなさい。

6 問題は，声を出して読んではいけません。

7 各問の配点は，比率(%)で表示してあります。

試験終了後

8 問題冊子は，必ず持ち帰りなさい。

1 四面体ABCDにおいて，$AB = 4$，$BC = 5$，$AC = AD = BD = CD = 3$とする。点Dから三角形ABCを含む平面へ垂線DHを下ろす。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$と$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$の値をそれぞれ求めよ。

(2) $\overrightarrow{AH}$を$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$を用いて表せ。

(3) 四面体ABCDの体積Vを求めよ。

（配点 25 %）

2 1 から n までの自然数を 1 つずつ選び，順に $a_1, a_2, \cdots, a_n$ とする。ただし，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ は互いに異なる数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ が成立することを示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - k)^2 + \sum_{k=1}^{n}\left\{a_k - (n-k+1)\right\}^2$ を n を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - k)^2$ が最大となるときの $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を求めよ。

（配点 25 %）

3 実数 t を変数とする2つの関数

$$c(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad s(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 媒介変数表示 $\begin{cases} x = c(t) \\ y = s(t) \end{cases}$ で表される曲線を C とする。このとき，x と y の関係式を求め，曲線 C の概形をかけ。

(2) $c(t)$ と $s(t)$ をそれぞれ微分せよ。

(3) $u = s(t)$ と置換することにより，定積分

$$\int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,du$$

の値を求めよ。

(配点 25 %)

$\boxed{4}$ 次の $\boxed{\text{問題}}$ について，しずかさん，れいさん，ゆうだいさんの3人が議論をしている。

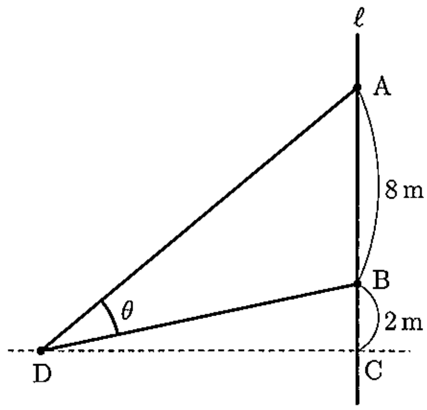
> $\boxed{\text{問題}}$ ある学校の文化祭では，縦8mの垂れ幕が垂直な壁にかかっていて，垂れ幕の下端がある人の目の高さより2m上方の位置にある。この人が壁から何m離れて見ると，この垂れ幕の上端と下端を見込む角が最大となるか。

しずか

右図のように，直線 ℓ を壁として，点Aを垂れ幕の上端，点Bを垂れ幕の下端，点Dを垂れ幕を見ている人の目の位置とした。この垂れ幕の上端と下端を見込む角 $\angle\mathrm{ADB}$ の大きさを θ とおいて，θ が最大となるときの点Dの位置を求めればよい。

れい

θ が最大となるときの点Dの位置を求めたいから，点Dから直線 ℓ に垂線DCを下ろし，線分DCの長さを x m とする。そして，三角比を使って式を作ればよい。



ゆうだい

角度の問題だから，2点A，Bを通り半直線CDに接する円をかいて，円周角の定理あるいは円周角の定理の逆を使えばよい。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 図とれいさんの考えを使って $\boxed{\text{問題}}$ を解くとき，次の小問に答えよ。

(i) $\angle\mathrm{ADC}=\alpha$, $\angle\mathrm{BDC}=\beta$ として，$\tan\theta$ を $\tan\alpha$, $\tan\beta$ を用いて表せ。

(ii) $\tan\theta$ を x を用いて表せ。

(iii) θ が最大となるときの，$\tan\theta$ と x の値をそれぞれ求めよ。

(2) 図とゆうだいさんの考えを使って $\boxed{\text{問題}}$ を解くとき，この人がこの垂れ幕の上端と下端を見込む角が最大となる位置は，ゆうだいさんのかいた円と半直線CDとの接点になることを示せ。

(配点 25 %)