

2021年度

M 3

数 学

2月25日(木)

理 学 部 (数学科)

9 : 50 ~ 11 : 50

【前期日程】

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れてはいけません。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(4枚)に受験番号を記入しなさい。

試験開始後

- 3 この問題冊子は、4ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出なさい。
- 4 解答はすべて各問に対応した解答用紙に記入しなさい。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏面へつづく」と明記しなさい。
- 6 問題は、声を出して読んではいけません。
- 7 各問の配点は、比率(%)で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰りなさい。

1 1 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれた 9 枚のカードがある。この中からカードを無作為に 1 枚引いて、書かれた数字を見てからカードをもとに戻す。これを 3 回繰り返すとき、引いたカードに書かれた 3 つの数字の積について、次の問いに答えよ。

- (1) この積が奇数となる確率を求めよ。
- (2) この積が 3 の倍数となる確率を求めよ。
- (3) この積が 6 と互いに素となる確率を求めよ。
- (4) この積が 6 の倍数となる確率を求めよ。

(配点 25 %)

2 1 から n までの自然数を 1 つずつ選び、順に a_1, a_2, \dots, a_n とする。ただし、 a_1, a_2, \dots, a_n は互いに異なる数とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 等式 $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ が成立することを示せ。

(2) $\sum_{k=1}^n (a_k - k)^2 + \sum_{k=1}^n \{a_k - (n - k + 1)\}^2$ を n を用いて表せ。

(3) $\sum_{k=1}^n (a_k - k)^2$ が最大となるときの a_1, a_2, \dots, a_n を求めよ。

(配点 25 %)

3 四面体 ABCD において、 $AB = 4$ 、 $BC = 5$ 、 $AC = AD = BD = CD = 3$ とする。点 D から三角形 ABC を含む平面へ垂線 DH を下ろす。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ と $\vec{AC} \cdot \vec{AD}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) \vec{AH} を \vec{AB} と \vec{AC} を用いて表せ。

(3) 四面体 ABCD の体積 V を求めよ。

(配点 25 %)

4 関数 $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$ について、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の増減と極値を調べ、 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2) a, b を 0 以上の整数とする。このとき

$$\int_0^1 x^{a+1}(1-x)^b dx = \frac{a+1}{b+1} \int_0^1 x^a(1-x)^{b+1} dx$$

が成り立つことを示せ。

(3) $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(4) (3) の図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

(配点 25 %)