2022年度

MB　数　学

3月12日(土)
【後期日程】　理　学　部（数学科）　12：20～14：50

注意事項

試験開始前

1　監督者の指示があるまで，問題冊子，解答用紙に手を触れてはいけません。

2　監督者の指示に従って，全部の解答用紙(５枚)に受験番号を記入しなさい。

試験開始後

3　この問題冊子は，５ページあります。はじめに，問題冊子，解答用紙を確かめ，枚数の不足や，印刷の不鮮明なもの，ページの落丁・乱丁があった場合は，手をあげて監督者に申し出なさい。

4　解答はすべて各問に対応した解答用紙に記入しなさい。

5　解答スペースが不足するときは，解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし，その場合は，表面に「裏面へつづく」と明記しなさい。

6　問題は，声を出して読んではいけません。

7　各問の配点は，比率(%)で表示してあります。

試験終了後

8　問題冊子は，必ず持ち帰りなさい。

1 7年に一度大発生するセミAと，11年に一度大発生するセミBと，13年に一度大発生するセミCがいる。今年を西暦2022年とする。セミAは2年前に，セミBは5年前に，セミCは1年前にそれぞれ大発生している。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 今年以降にセミAが大発生する年（西暦）を自然数nを用いて表せ。

(2) 今年以降にセミAとセミBが同時に大発生する年（西暦）を自然数kを用いて表せ。

(3) セミA，セミB，セミCが今年以降初めて同時に大発生するのは西暦何年か。

（配点20％）

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{8na_n + 3} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) すべての n に対して，$a_n > 0$ であることを示せ。

(2) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくとき，b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ。

(3) $c_n = b_{n+1} - b_n$ とおくとき，c_{n+1} と c_n の関係式を求めよ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

（配点 20 %）

$\boxed{3}$ $\triangle$ABC において AB $=\sqrt{2}$， AC $=$ BC $=2$ とする。また，$\triangle$ABC の外接円の中心を O とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$， $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。

(2) $\triangle$ABC の面積を求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ が成り立つような実数 s，t を求めよ。

(4) $\triangle$ABC の外接円上の点 P を，AP と BC が垂直になるようにとる。ただし，点 P は点 A と異なるとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=u\vec{b}+v\vec{c}$ が成り立つような実数 u，v を求めよ。

（配点 20 %）

4 α を $0 < \alpha < 1$ を満たす実数とし，θ を $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。座標平面において，$\theta \neq 0$ のとき，点 $\mathrm{A}(-1, 0)$ を通り，傾きが $\frac{1}{\tan\theta}$ の直線を ℓ，点 $\mathrm{B}(\tan^2\theta, 0)$ を中心とする半径 AB の円を C，直線 ℓ と円 C との交点のうち A と異なる点を D とし，線分 AD を $(1-\alpha):\alpha$ に内分する点を E とする。$\theta = 0$ のとき，直線 ℓ は直線 $x = -1$ に，点 E は点 A に一致すると定める。θ が区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ を動くとき，点 E の描く図形を P とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 E の座標は $(2(1-\alpha)\tan^2\theta - 1, 2(1-\alpha)\tan\theta)$ であることを示せ。

(2) 図形 P は放物線であることを示し，その方程式を求めよ。

(3) 放物線 P の焦点の x 座標を $r(\alpha)$ とし，直線 $x = r(\alpha)$ と，放物線 P および y 軸で囲まれた図形の面積を $S(\alpha)$ とする。このとき，$S(\alpha) = 1$ を満たす α が存在することを示せ。

（配点 20 %）

5 n を 2 以上の自然数とし，$k=0,1,2,\cdots,n$ に対して

$$x_k=\frac{n^2+2k^2}{n^2+k^2}\cos\frac{k\pi}{n},\quad y_k=\frac{n^2+2k^2}{n^2+k^2}\sin\frac{k\pi}{n},$$

とおく。座標平面上に点 $\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k)$ を定め，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2,\ \cdots,\ \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を S_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=\dfrac{1+2x^2}{1+x^2}$ は $0\leqq x\leqq 1$ において単調に増加することを示せ。

(2) $k=1,2,\cdots,n$ に対して，$\triangle\mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の面積は $\dfrac{1}{2}|x_{k-1}y_k-x_ky_{k-1}|$ であることを示せ。

(3) S_n を (1) の $f(x)$ を用いて表せ。

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

（配点 20 %）