

2022年度

M 2

数 学

2月25日(金) 【前期日程】	情報学部 (情報科学科)	9:30~11:30
	理学部 (物理学科, 化学科, 創造理学コース)	9:50~11:50
	工学部	9:20~11:20

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れてはいけません。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(4枚)に受験番号を記入しなさい。

試験開始後

- 3 この問題冊子は、4ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出なさい。
- 4 解答はすべて各問に対応した解答用紙に記入しなさい。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏面へつづく」と明記しなさい。
- 6 問題は、声を出して読んではいけません。
- 7 各問の配点は、比率(%)で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰りなさい。

1 $\triangle ABC$ を鋭角三角形とし、 $\triangle ABC$ の外接円の中心を O 、半径を R 、 $\angle BOC = \frac{\pi}{3}$ 、 $\angle OAB = \theta$ とする。また、 $\triangle ABC$ の面積を S とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) θ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) 辺 AB の長さを R と θ を用いて表せ。
- (3) S を R と θ を用いて表せ。
- (4) θ が (1) で求めた範囲を動くとき、 S の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

(配点 25%)

2 0でない複素数 z に対して,

$$w = z + \frac{4}{z}$$

とする。また、 i は虚数単位とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) z の極形式を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) とし、 w の実部を x 、虚部を y とする。このとき、 x と y を r と θ を用いてそれぞれ表せ。
- (2) 複素数平面上で点 $P(z)$ が $|z| = 1$ を満たしながら動くとき、点 $Q(w)$ が描く図形を求め、複素数平面上に図示せよ。
- (3) w が実数となるための z の条件を求め、その条件を満たす点 $P(z)$ の全体が表す図形を複素数平面上に図示せよ。
- (4) 点 $P(z)$ が (3) の図形上を動くとする。点 $R(\alpha)$ が $|\alpha - (4 + 6i)| = 1$ を満たしながら動くとき、線分 PR の長さの最小値を求めよ。

(配点 25%)

3 $\triangle OAB$ を鋭角三角形とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。頂点 O から辺 AB に垂線を下ろし、辺 AB との交点を P とする。また、頂点 A から辺 OB に垂線を下ろし、辺 OB との交点を Q とする。線分 OP と線分 AQ の交点を H とする。 $AP : PB = 5 : 3$ 、 $OQ : QB = 5 : 2$ であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) \overrightarrow{OH} を \vec{a} と \vec{b} を用いて表せ。
- (2) $\cos \angle AOB$ を求めよ。
- (3) $\angle OAB$ を求めよ。
- (4) $OB = \sqrt{7}$ とする。頂点 B から辺 OA に垂線を下ろし、辺 OA との交点を R とする。線分 BR の長さを求めよ。

(配点 25%)

4 $x \geq 1$ の範囲で関数 $f(x) = \frac{\sqrt{\log x}}{x}$ を考える。ただし、 \log は自然対数とする。次の問いに答えよ。なお、必要ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ が成り立つことを使ってもよい。

- (1) $f(x)$ の増減を調べ、 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。ただし、凹凸および変曲点を求める必要はない。また、 $f(x)$ の極値を求めよ。
- (2) $M > 1$ に対して、曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = 1$ 、 $x = M$ および x 軸で囲まれる図形を $F(M)$ とするとき、 $F(M)$ の面積 $S(M)$ を M を用いて表せ。
- (3) (2) の $F(M)$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 $V(M)$ を M を用いて表せ。
- (4) (2)、(3) の $S(M)$ 、 $V(M)$ について、極限 $\lim_{M \rightarrow \infty} S(M)$ 、 $\lim_{M \rightarrow \infty} V(M)$ の収束、発散をそれぞれ調べよ。なお、収束する場合は極限值も求めよ。

(配点 25 %)

