2022年度

M３　数学

2月25日(金)　理　学　部（数学科）　9：50～11：50
【前 期 日 程】

注 意 事 項

試験開始前

1 監督者の指示があるまで，問題冊子，解答用紙に手を触れてはいけません。

2 監督者の指示に従って，全部の解答用紙(４枚)に受験番号を記入しなさい。

試験開始後

3 この問題冊子は，４ページあります。はじめに，問題冊子，解答用紙を確かめ，枚数の不足や，印刷の不鮮明なもの，ページの落丁・乱丁があった場合は，手をあげて監督者に申し出なさい。

4 解答はすべて各問に対応した解答用紙に記入しなさい。

5 解答スペースが不足するときは，解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし，その場合は，表面に「裏面へつづく」と明記しなさい。

6 問題は，声を出して読んではいけません。

7 各問の配点は，比率(%)で表示してあります。

試験終了後

8 問題冊子は，必ず持ち帰りなさい。

1 $\triangle$ABC を鋭角三角形とし，$\triangle$ABC の外接円の中心を O，半径を R，$\angle \mathrm{BOC} = \frac{\pi}{3}$， $\angle \mathrm{OAB} = \theta$ とする。また，$\triangle$ABC の面積を S とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) θ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 辺 AB の長さを R と θ を用いて表せ。

(3) S を R と θ を用いて表せ。

(4) θ が (1) で求めた範囲を動くとき，S の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

（配点 25 %）

2 △OAB を鋭角三角形とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。頂点 O から辺 AB に垂線を下ろし，辺 AB との交点を P とする。また，頂点 A から辺 OB に垂線を下ろし，辺 OB との交点を Q とする。線分 OP と線分 AQ の交点を H とする。AP : PB = 5 : 3，OQ : QB = 5 : 2 であるとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\cos\angle AOB$ を求めよ。

(3) $\angle OAB$ を求めよ。

(4) $OB=\sqrt{7}$ とする。頂点 B から辺 OA に垂線を下ろし， 辺 OA との交点を R とする。線分 BR の長さを求めよ。

(配点 25 %)

3 0でない複素数 z に対して，

$$w = z + \frac{4}{z}$$

とする。また，i は虚数単位とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) z の極形式を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とし，w の実部を x，虚部を y とする。このとき，x と y を r と θ を用いてそれぞれ表せ。

(2) 複素数平面上で点 $\mathrm{P}(z)$ が $|z| = 1$ を満たしながら動くとき，点 $\mathrm{Q}(w)$ が描く図形を求め，複素数平面上に図示せよ。

(3) w が実数となるための z の条件を求め，その条件を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ の全体が表す図形を複素数平面上に図示せよ。

(4) 点 $\mathrm{P}(z)$ が (3) の図形上を動くとする。点 $\mathrm{R}(\alpha)$ が $|\alpha - (4 + 6i)| = 1$ を満たしながら動くとき，線分 PR の長さの最小値を求めよ。

（配点 25 %）

4 $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で関数 $f_n(x) = \frac{1}{\cos^n x}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f_2(x)\,dx$ を求めよ。

(2) $f_n(x)$ の導関数を求めよ。

(3) 等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \{f_{n+2}(x) - f_n(x)\}\,dx = \frac{2^n}{n+1}\sqrt{3} - \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{3}} f_n(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(4) 曲線 $y = f_4(x)$ と x 軸，y 軸および直線 $x = \frac{\pi}{3}$ で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

（配点 25 %）