

2023年度

MA

数 学

3月12日(日) 情報学部(情報科学科) 12:20~14:20
【後期日程】 理学部(創造理学コース)
工学部

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れてはいけません。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(4枚)に受験番号を記入下さい。

試験開始後

- 3 この問題冊子は、4ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出下さい。
- 4 解答はすべて各問に対応した解答用紙に記入下さい。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏面へつづく」と明記下さい。
- 6 問題は、声を出して読むてはいけません。
- 7 各問の配点は、比率(%)で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰り下さい。

1 自然数 n に対して $(1 + \sqrt{2})^n$ を

$$(1 + \sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2} \quad (x_n, y_n \text{ は自然数})$$

と表す。(ただし、このような自然数 x_n, y_n が一意に定まることは認めてよい。) また、 $z_n = x_n^2 - 2y_n^2$ とおく。数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) x_{n+1}, y_{n+1} を、 x_n, y_n を用いてそれぞれ表せ。
- (2) z_{n+1} を z_n を用いて表せ。
- (3) 数列 $\{z_n\}$ の一般項 z_n を求めよ。
- (4) 方程式 $x^2 - 2y^2 = 1$ を満たす自然数 x, y の組 (x, y) を 4 組求めよ。

(配点 25 %)

2 2つの正の数 c, d に対して、座標空間の4点 $A(2, 1, 0), B(0, 2, -1), C(c, 0, -2c), D(d, -d, d)$ を考える。 $\triangle ABC$ は正三角形とし、 $\angle ABD = \frac{\pi}{6}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) c, d の値をそれぞれ求めよ。
- (2) 3点 A, B, C を通る平面 α に点 D から下ろした垂線を DE とする。点 E の座標を求めよ。
- (3) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。

(配点 25 %)

3 正の数 k に対して、次の 2 つの不等式を考える。

$$x^2 + 2x - k > 0 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

$$x^2 - k^2 < 0 \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) ① を満たす実数 x の値の範囲を k を用いて表せ。
- (2) ① と ② を同時に満たす実数 x の値の範囲を k を用いて表せ。
- (3) ① と ② を同時に満たすような整数 x は $x = 1$ のみとなる k の値の範囲を求めよ。
- (4) ① と ② を同時に満たすような整数 x は $x = 2$ のみとなる k の値を求めよ。

(配点 25 %)

4 実数 a, b は $1 < a < b$ を満たすとする。 $0 \leq x \leq 1$ で定義された関数

$$f(x) = \frac{1}{2}(a^x b^{1-x} + a^{1-x} b^x)$$

に対して、次の問いに答えよ。ただし、 \log は自然対数とする。

- (1) 1 ではない正の実数 c に対して $(c^x)' = c^x \log c$ であることを、対数微分法を用いて示せ。
- (2) 第 1 次導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ をそれぞれ求めよ。
- (3) 関数 $f(x)$ の増減を調べ、最大値と最小値を求めよ。
- (4) 定積分 $\int_0^1 f(x) dx$ を求めよ。
- (5) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sqrt{ab} \leq \frac{b-a}{\log b - \log a} \leq \frac{a+b}{2}$$

(配点 25 %)

正解・解答例

教科・科目名	数学 MA (後期日程試験：令和5年度)
1	<p>(1) $x_{n+1} = x_n + 2y_n, y_{n+1} = x_n + y_n$</p> <p>(2) $z_{n+1} = -z_n$</p> <p>(3) $z_n = (-1)^n$</p> <p>(4) $(x, y) = (3, 2), (17, 12), (99, 70), (577, 408)$ など</p>
2	<p>(1) $c = 1, d = 3$</p> <p>(2) $E(5, -1, 1)$</p> <p>(3) 3</p>
3	<p>(1) $x < -1 - \sqrt{k+1}$ および $-1 + \sqrt{k+1} < x$</p> <p>(2) $k > 3$ のとき $-k < x < -1 - \sqrt{k+1}$ および $-1 + \sqrt{k+1} < x < k$, $0 < k \leq 3$ のとき $-1 + \sqrt{k+1} < x < k$</p> <p>(3) $1 < k \leq 2$</p> <p>(4) $k = 3$</p>
4	<p>(1) 略</p> <p>(2) $f'(x) = \frac{\log a - \log b}{2}(a^x b^{1-x} - a^{1-x} b^x),$ $f''(x) = \frac{(\log a - \log b)^2}{2}(a^x b^{1-x} + a^{1-x} b^x)$</p> <p>(3) $x = 0$ および $x = 1$ のとき最大値 $\frac{a+b}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ のとき最小値 \sqrt{ab} (増減は略)</p> <p>(4) $\frac{b-a}{\log b - \log a}$</p> <p>(5) 略</p>

採点・評価基準（具体的基準）

教科・科目名	数 学 MA（後期日程試験：令和 5 年度）
実施学部 学科（課程）等	情報学部（情報科学科），理学部（創造理学コース），工学部
出題のねらい	<p>1 数列の基本を理解しているか。二項定理を用いた計算ができるか。</p> <p>2 ベクトルに関する基本的な性質を理解し，空間図形に関する問題を解くことができるか。</p> <p>3 2次関数の基本を理解し，2次不等式を解くことができるか。</p> <p>4 微分・積分の基本を理解しているか。指数関数・対数関数について理解しているか。</p>
採点基準	<p>1 配点 25 %</p> <p>2 配点 25 %</p> <p>3 配点 25 %</p> <p>4 配点 25 %</p>