2023年度

# ＭＢ　数　学

3月12日(日)
【後 期 日 程】
理　学　部（数学科）　12：20〜14：50

## 注 意 事 項

### 試験開始前

1 監督者の指示があるまで，問題冊子，解答用紙に手を触れてはいけません。

2 監督者の指示に従って，全部の解答用紙(５枚)に受験番号を記入しなさい。

### 試験開始後

3 この問題冊子は，５ページあります。はじめに，問題冊子，解答用紙を確かめ，枚数の不足や，印刷の不鮮明なもの，ページの落丁・乱丁があった場合は，手をあげて監督者に申し出なさい。

4 解答はすべて各問に対応した解答用紙に記入しなさい。

5 解答スペースが不足するときは，解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし，その場合は，表面に「裏面へつづく」と明記しなさい。

6 問題は，声を出して読んではいけません。

7 各問の配点は，比率(%)で表示してあります。

### 試験終了後

8 問題冊子は，必ず持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ 自然数 $n$ に対して $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ を

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{2} \qquad (x_n,\ y_n\text{は自然数})$$

と表す。(ただし，このような自然数 $x_n$, $y_n$ が一意に定まることは認めてよい。) また，$z_n = x_n^2 - 2y_n^2$ とおく。数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $x_{n+1}$，$y_{n+1}$ を，$x_n$，$y_n$ を用いてそれぞれ表せ。

(2) $z_{n+1}$ を $z_n$ を用いて表せ。

(3) 数列 $\{z_n\}$ の一般項 $z_n$ を求めよ。

(4) 方程式 $x^2-2y^2=1$ を満たす自然数 $x$，$y$ の組 $(x,\ y)$ を 4 組求めよ。

(配点 20 %)

**2** 2つの正の数 $c$, $d$ に対して，座標空間の4点 A$(2, 1, 0)$, B$(0, 2, -1)$, C$(c, 0, -2c)$, D$(d, -d, d)$ を考える。△ABC は正三角形とし，$\angle \mathrm{ABD} = \dfrac{\pi}{6}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $c$, $d$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 3点 A，B，C を通る平面 $\alpha$ に点 D から下ろした垂線を DE とする。点 E の座標を求めよ。

(3) 四面体 ABCD の体積を求めよ。

（配点 20 %）

**3** 実数 $p, q$ に対して，方程式 $x^3+px+q=0$ は異なる 2 つの実数解 $\alpha, \beta$ をもつとする。ここで，$\alpha$ は重解とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $p$，$q$ および $\beta$ を，それぞれ $\alpha$ を用いて表せ。

(2) $\alpha=2$ のとき $x^3+px+q>0$ となる実数 $x$ の値の範囲を求めよ。

(3) $\alpha=2$ とする。曲線 $y=x^3+px+q$ と直線 $y=3x+t$ の共有点がちょうど 2 個であるとき，$t$ の値とそのときの 2 つの共有点の座標を求めよ。

（配点 20 %）

**4** 実数 $a$, $b$ は $1 < a < b$ を満たすとする。$0 \leqq x \leqq 1$ で定義された関数

$$f(x) = \frac{1}{2}(a^x b^{1-x} + a^{1-x} b^x)$$

に対して，次の問いに答えよ。ただし，log は自然対数とする。

(1) 1 ではない正の実数 $c$ に対して $(c^x)' = c^x \log c$ であることを，対数微分法を用いて示せ。

(2) 第 1 次導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ をそれぞれ求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，最大値と最小値を求めよ。

(4) 定積分 $\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めよ。

(5) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{b-a}{\log b - \log a} \leqq \frac{a+b}{2}$$

（配点 20 %）

**5** 複素数平面上の3点 A$(\alpha)$，B$(\beta)$，C$(\gamma)$ を頂点とする △ABC は正三角形であるとする。また，$\omega=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $n=1, 2, 3, 4, 5$ に対しては $\omega^n \neq 1$ であり，かつ $\omega^6=1$ であることを示せ。

(2) $\omega^2-\omega+1=0$ であることを示せ。

(3) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta$ であることを示せ。

(4) $\alpha=2-i$，$\beta=5+i$ のとき，$\gamma$ の値を求めよ。ただし，$i$ は虚数単位とする。

（配点 20 %）

# 正 解 ・ 解 答 例

| 教科・科目名 | 数 学 MB（後期日程試験：令和 5 年度） |
| --- | --- |
| $\boxed{1}$ | （1）$x_{n+1} = x_n + 2y_n$，　$y_{n+1} = x_n + y_n$<br>（2）$z_{n+1} = -z_n$<br>（3）$z_n = (-1)^n$<br>（4）$(x,\ y) = (3,\ 2)$，$(17,\ 12)$，$(99,\ 70)$，$(577,\ 408)$ など |
| $\boxed{2}$ | （1）$c = 1$，$d = 3$<br>（2）$\mathrm{E}(5,\ -1,\ 1)$<br>（3）3 |
| $\boxed{3}$ | （1）$p = -3\alpha^2$，　$q = 2\alpha^3$，　$\beta = -2\alpha$<br>（2）$-4 < x < 2$ および $2 < x$<br>（3）$t = 16 - 10\sqrt{5}$ のとき $\left(\sqrt{5},\ 16 - 7\sqrt{5}\right)$，$\left(-2\sqrt{5},\ 16 - 16\sqrt{5}\right)$<br>　　$t = 16 + 10\sqrt{5}$ のとき $\left(-\sqrt{5},\ 16 + 7\sqrt{5}\right)$，$\left(2\sqrt{5},\ 16 + 16\sqrt{5}\right)$ |
| $\boxed{4}$ | （1）略<br>（2）$f'(x) = \dfrac{\log a - \log b}{2}(a^x b^{1-x} - a^{1-x} b^x)$，<br>　　$f''(x) = \dfrac{(\log a - \log b)^2}{2}(a^x b^{1-x} + a^{1-x} b^x)$<br>（3）$x = 0$ および $x = 1$ のとき最大値 $\dfrac{a+b}{2}$，$x = \dfrac{1}{2}$ のとき最小値<br>　　$\sqrt{ab}$　（増減は略）<br>（4）$\dfrac{b-a}{\log b - \log a}$<br>（5）略 |
| $\boxed{5}$ | （1）略<br>（2）略<br>（3）略<br>（4）$\gamma = \dfrac{7-2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$，　$\dfrac{7+2\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$ |

# 採点・評価基準（具体的基準）

| | |
|---|---|
| 教科・科目名 | **数 学　MB（後期日程試験：令和 5 年度）** |
| 実施学部<br>学科（課程）等 | 理学部（数学科） |
| 出題のねらい | $\boxed{\mathbf{1}}$　数列の基本を理解しているか。二項定理を用いた計算ができるか。<br><br>$\boxed{\mathbf{2}}$　ベクトルに関する基本的な性質を理解し，空間図形に関する問題を解くことができるか。<br><br>$\boxed{\mathbf{3}}$　3 次関数の基本を理解しているか。恒等式について理解しているか。<br><br>$\boxed{\mathbf{4}}$　微分・積分の基本を理解しているか。指数関数・対数関数について理解しているか。<br><br>$\boxed{\mathbf{5}}$　複素数に関する基本的な性質を理解しているか。 |
| 採点基準 | $\boxed{\mathbf{1}}$　配点 20 %<br><br>$\boxed{\mathbf{2}}$　配点 20 %<br><br>$\boxed{\mathbf{3}}$　配点 20 %<br><br>$\boxed{\mathbf{4}}$　配点 20 %<br><br>$\boxed{\mathbf{5}}$　配点 20 % |