

2023年度

M 3

数 学

2月25日(土) 理 学 部 (数学科)  
【前期日程】

9 : 50 ~ 11 : 50

#### 注 意 事 項

##### 試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れてはいけません。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(4枚)に受験番号を記入しなさい。

##### 試験開始後

- 3 この問題冊子は、4ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出なさい。
- 4 解答はすべて各問に対応した解答用紙に記入しなさい。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏面へつづく」と明記しなさい。
- 6 問題は、声を出して読むてはいけません。
- 7 各問の配点は、比率(%)で表示してあります。

##### 試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰りなさい。

**1** 関数  $f(x) = x^3 e^{-x^2}$  について、次の問いに答えよ。ただし、 $e$  は自然対数の底とする。必要ならば  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} = 0$  を用いてもよい。

- (1) 関数  $f(x)$  の増減を調べ、極値を求めよ。
- (2)  $a > 0$  とする。方程式  $e^{x^2} - ax^3 = 0$  の実数解の個数を求めよ。
- (3) 曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸および直線  $x = 2$  で囲まれた図形の面積を求めよ。

(配点 25 %)

**2**  $n$  を自然数とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) すべての  $n$  に対して、不等式  $n < \left(\frac{3}{2}\right)^n$  が成り立つことを示せ。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$  が成り立つことを示せ。

(3) すべての  $n$  に対して、不等式  $\frac{n(n+1)}{2} < 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n - 3$  が成り立つことを示せ。

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$  が成り立つことを示せ。

(配点 25 %)

**3**  $\triangle ABC$  において、辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  を  $1:2$  に内分する点をそれぞれ  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  とし、線分  $AA_1$  と線分  $BB_1$  の交点を  $A_2$ , 線分  $BB_1$  と線分  $CC_1$  の交点を  $B_2$ , 線分  $CC_1$  と線分  $AA_1$  の交点を  $C_2$  とする。 $\triangle ABC$ ,  $\triangle A_2B_2C_2$  の面積をそれぞれ  $S$ ,  $S_2$  とする。また、 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$  とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) ベクトル  $\overrightarrow{AA_1}$ ,  $\overrightarrow{AA_2}$ ,  $\overrightarrow{AC_2}$  をそれぞれ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ。

(2)  $\triangle BAC_2$  の面積と  $\triangle BA_2C_2$  の面積は等しいことを示せ。

(3) 面積比  $S:S_2$  を求めよ。

(配点 25%)

4 箱の中に15本のくじが入っている。そのうち、5本が当たりくじで、10本がはずれくじである。箱の中からくじを1本引いて当たりかはずれかを確認し、引いたくじを箱に戻す試行を考える。この試行をくり返し、次の条件(a)または(b)が満たされた時点で終了する。

(a) 当たりくじを合計3回引く

(b) はずれくじを連続して3回引く

このとき、次の問いに答えよ。

(1) ちょうど4回でくじ引きが終了する確率を求めよ。

(2) ちょうど5回でくじ引きが終了する確率を求めよ。

(3) ちょうど7回でくじ引きが終了する確率を求めよ。

(配点 25 %)

## 正解・解答例

教科・科目名	数学 M3 (前期日程試験：令和5年度)
<b>1</b>	<p>(1) <math>x = -\sqrt{\frac{3}{2}}</math> のとき極小値 <math>-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}</math>, <math>x = \sqrt{\frac{3}{2}}</math> のとき極大値 <math>\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}</math> (増減表は略)</p> <p>(2) <math>0 &lt; a &lt; \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}e^{\frac{3}{2}}</math> のとき 0 個, <math>a = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}e^{\frac{3}{2}}</math> のとき 1 個, <math>a &gt; \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}e^{\frac{3}{2}}</math> のとき 2 個</p> <p>(3) <math>\frac{1}{2}(1 - 5e^{-4})</math></p>
<b>2</b>	<p>(1) 略</p> <p>(2) 略</p> <p>(3) 略</p> <p>(4) 略</p>
<b>3</b>	<p>(1) <math>\overrightarrow{AA_1} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}</math>, <math>\overrightarrow{AA_2} = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}</math>, <math>\overrightarrow{AC_2} = \frac{2}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}</math></p> <p>(2) 略</p> <p>(3) <math>S : S_2 = 7 : 1</math></p>
<b>4</b>	<p>(1) <math>\frac{14}{81}</math></p> <p>(2) <math>\frac{16}{81}</math></p> <p>(3) <math>\frac{64}{729}</math></p>

## 採点・評価基準（具体的基準）

教科・科目名	<b>数 学 M3（前期日程試験：令和 5 年度）</b>
実施学部 学科（課程）等	理学部（数学科）
出題のねらい	<p><b>1</b> 微分・積分に関する基本を理解しているか。曲線が囲む図形の面積を求めることができるか。</p> <p><b>2</b> 数学的帰納法を用いた証明ができるか。また、数列の極限の基本を理解しているか。</p> <p><b>3</b> ベクトルに関する基本的な性質を理解し、平面図形に関する問題を解くことができるか。</p> <p><b>4</b> 場合の数および確率に関する基本を理解しているか。</p>
採点基準	<p><b>1</b> 配点 25 %</p> <p><b>2</b> 配点 25 %</p> <p><b>3</b> 配点 25 %</p> <p><b>4</b> 配点 25 %</p>