

2024年度

MB

# 数 学

3月12日(火) 理 学 部 (数学科)  
【後 期 日 程】

12 : 20 ~ 14 : 50

## 注 意 事 項

### 試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れてはいけません。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(5枚)に受験番号を記入しなさい。

### 試験開始後

- 3 この問題冊子は、5ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出なさい。
- 4 解答はすべて各問に対応した解答用紙に記入しなさい。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏面へつづく」と明記しなさい。
- 6 問題は、声を出して読むではいけません。
- 7 各問の配点は、比率(%)で表示してあります。

### 試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰りなさい。

**1** 座標平面上で中心が  $P(\sqrt{2}, 0)$  で半径が 1 の円  $C$  と、原点  $O$  を通り傾きが  $\tan \theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) の直線  $l$  を考える。

- (1) 円  $C$  と直線  $l$  が異なる 2 点で交わるときの  $\theta$  の範囲を求めよ。
- (2)  $\theta$  が (1) の範囲を動くとき、円  $C$  と直線  $l$  の交点を  $Q, R$  とおく。 $\angle QPR = \alpha$  とおくと、 $\cos \alpha$  を  $\theta$  を用いて表せ。
- (3)  $\triangle PQR$  の面積を最大にする  $\theta$  の値を求めよ。

(配点 20 %)

2 空間内の四面体 OABC において,  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$  とする。また,

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \quad |\vec{c}| = 2, \quad \angle AOB = \angle BOC = \angle COA = \frac{\pi}{2}$$

とする。点 A から辺 BC に垂線 AP を下ろす。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)  $\vec{OP}$  を  $\vec{b}$  と  $\vec{c}$  を用いて表せ。

(2) 点 Q は  $\angle QPB = \frac{\pi}{2}$ ,  $|\vec{QP}| = |\vec{AP}|$  を満たすとする。さらに  $k < 0$  と  $l < 0$  を用いて  $\vec{OQ} = k\vec{b} + l\vec{c}$  と表せるとき,  $k$  と  $l$  を求めよ。

(3) 点 D は  $\vec{OD} = \vec{b} + 2\vec{c}$  を満たすとする。また点 R が辺 BC 上を動くとき,  $|\vec{AR}| + |\vec{RD}|$  を最小とする点を  $R_0$  とする。このとき,  $\vec{OR}_0$  を  $\vec{b}$  と  $\vec{c}$  を用いて表せ。

(配点 20 %)

**3** 正の整数  $n$  に対して、関数  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$  を考える。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $f_n(x)$  を微分せよ。
- (2)  $n$  が偶数のとき、 $0 \leq x \leq 1$  の範囲で  $\log(1+x) \geq f_n(x)$  が成り立つことを示せ。ただし  $\log$  は自然対数を表す。
- (3)  $a_m = f_{2m}(1)$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) とするとき、極限  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m$  を求めよ。

(配点 20 %)

4 複素数  $z_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を

$$z_1 = 0, \quad z_{n+1} = \frac{(3+i)z_n + (1-i)}{(1+i)z_n + (3-i)}$$

で定める。ただし  $i$  は虚数単位を表す。このとき、次の問いに答えよ。

(1)  $z$  を複素数とする。  $|z| < 1$  のとき、

$$|(1+i)z + (3-i)| > |(3+i)z + (1-i)|$$

が成り立つことを示せ。

(2) 複素数  $w_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を

$$w_n = \frac{z_n + i}{iz_n + 1}$$

で定める。このとき、 $w_{n+1}$  を  $w_n$  を用いて表せ。

(3)  $z_n$  を実数  $a_n, b_n$  を用いて  $z_n = a_n + b_n i$  と表すとき、極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  をそれぞれ求めよ。

(配点 20%)

**5** 正の整数  $n$  と整数  $x, y$  に対して,  $x - y$  が  $n$  で割り切れるとき,  $x \equiv y \pmod{n}$  と書くことにする。  $a, b$  を正の整数とする。  $x, y$  がすべての整数を動くとき,  $ax + by$  の形で表される最小の正の整数を  $d$  とする。このとき, 次の各命題を証明せよ。

- (1) どのような整数  $x, y$  に対しても,  $ax + by$  は  $d$  の倍数である。
- (2)  $d$  は  $a$  と  $b$  の最大公約数である。
- (3)  $r$  を整数とし,  $a$  と  $b$  は互いに素であるとする。このとき,  $ax \equiv r \pmod{b}$  を満たす整数  $x$  が存在する。
- (4)  $r, s$  を整数とし,  $a$  と  $b$  は互いに素であるとする。このとき,  $z \equiv r \pmod{b}, z \equiv s \pmod{a}$  を同時に満たす整数  $z$  が存在する。

(配点 20 %)

## 正解・解答例

教科・科目名	数学 MB（後期日程試験：令和6年度）
<b>1</b>	<p>(1) <math>0 &lt; \theta &lt; \frac{\pi}{4}</math></p> <p>(2) <math>4 \sin^2 \theta - 1</math></p> <p>(3) <math>\frac{\pi}{6}</math></p>
<b>2</b>	<p>(1) <math>\frac{4}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}</math></p> <p>(2) <math>k = -\frac{2}{5}, \ell = -\frac{1}{10}</math></p> <p>(3) <math>\frac{1}{5}\vec{b} + \frac{4}{5}\vec{c}</math></p>
<b>3</b>	<p>(1) <math>f'_n(x) = \begin{cases} \frac{1 - (-x)^n}{1+x} &amp; (x \neq -1) \\ n &amp; (x = -1) \end{cases}</math></p> <p>(2) 略</p> <p>(3) <math>\log 2</math></p>
<b>4</b>	<p>(1) 略</p> <p>(2) <math>w_{n+1} = \frac{w_n + 1}{2}</math></p> <p>(3) <math>\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0</math></p>
<b>5</b>	<p>(1) 略</p> <p>(2) 略</p> <p>(3) 略</p> <p>(4) 略</p>

## 採点・評価基準（具体的基準）

教科・科目名	<b>数 学 MB（後期日程試験：令和6年度）</b>
実施学部 学科（課程）等	理学部（数学科）
出題のねらい	<p><b>1</b> 平面図形に関する基本的な性質を理解しているか。</p> <p><b>2</b> ベクトルに関する基本的な性質を理解し、空間図形に関する問題を解くことができるか。</p> <p><b>3</b> 微分の基本を理解し、極限に関する問題を解くことができるか。</p> <p><b>4</b> 複素数に関する性質を理解しているか。</p> <p><b>5</b> 整数に関する性質を理解しているか。</p>
採点基準	<p><b>1</b> 配点 20 %</p> <p><b>2</b> 配点 20 %</p> <p><b>3</b> 配点 20 %</p> <p><b>4</b> 配点 20 %</p> <p><b>5</b> 配点 20 %</p>