2024年度

M 3　数　学

2月25日(日)　理　学　部（数学科）　9：50～11：50
【前 期 日 程】

注 意 事 項

試験開始前

1　監督者の指示があるまで，問題冊子，解答用紙に手を触れてはいけません。

2　監督者の指示に従って，全部の解答用紙(４枚)に受験番号を記入しなさい。

試験開始後

3　この問題冊子は，４ページあります。はじめに，問題冊子，解答用紙を確かめ，枚数の不足や，印刷の不鮮明なもの，ページの落丁・乱丁があった場合は，手をあげて監督者に申し出なさい。

4　解答はすべて各問に対応した解答用紙に記入しなさい。

5　解答スペースが不足するときは，解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし，その場合は，表面に「裏面へつづく」と明記しなさい。

6　問題は，声を出して読んではいけません。

7　各問の配点は，比率(%)で表示してあります。

試験終了後

8　問題冊子は，必ず持ち帰りなさい。

1 座標平面上の直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ を ℓ とする。ℓ 上に中心があり x 軸の正の部分と接する半径 1 の円を O_1 とする。正の整数 n に対して，O_{n+1} を，ℓ 上に中心があり O_n と x 軸の両方に接する円のうち半径が O_n より小さい円とする。各円 O_n の中心の座標を (x_n, y_n) とし，3 点 (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}), (x_n, y_{n+1}) を頂点とする三角形の面積を S_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) y_2 を求めよ。

(2) y_n を n の式で表せ。

(3) S_n を n の式で表せ。

(4) $S_m > 10^{-5}$ を満たす最大の正の整数 m を求めよ。ただし，必要であれば次の不等式 $0.30 < \log_{10} 2 < 0.31$, $0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$ を用いてよい。

（配点 25 %）

$\boxed{2}$ a, b, c を実数とする。$x = a+b+c$, $y = bc+ca+ab$, $z = abc$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $a^2+b^2+c^2$ を x, y を用いて表せ。

(2) $a^3+b^3+c^3$ を x, y, z を用いて表せ。

(3) $a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ。

(4) 次の等式を満たす実数 p, q, r は存在しないことを示せ。

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{r^3}=1$$

（配点 25 %）

◇M8 (687—43)

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = x - x^2, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leqq x \leqq 1) \\ f(-x) & (-1 \leqq x \leqq 0) \end{cases}$$

により定める。曲線 $y = g(x)$ および $y = \dfrac{2}{\pi^2}\sin \pi x \ (-1 \leqq x \leqq 1)$ によって囲まれる図形 D を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $h(x) = f(x) - \dfrac{2}{\pi^2}\sin \pi x$ とおくとき，$h(x)$ の $x = \dfrac{1}{2}$ における微分係数を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $f(x) \geqq \dfrac{2}{\pi^2}\sin \pi x$ が成り立つことを示せ。

(3) D の面積を求めよ。

(4) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

(配点 25 %)

4 空間内に点 O, A, B, C, D, E がある。3 点 O, B, C は一直線上にないとし，これら 3 点を含む平面を α とする。平面 α はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に垂直であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \neq \vec{0}, \quad \overrightarrow{\mathrm{BD}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{CE}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad (0 < t < s < 1)$$

を満たしている。また，2 点 A, D を通る直線，2 点 D, E を通る直線，2 点 A, E を通る直線が平面 α と交わる点をそれぞれ P, Q, R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{b}$ と実数 s を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ および実数 s, t を用いて表せ。

(3) 3 点 P, Q, R が一直線上にあることを示せ。

（配点 25 %）

正 解 ・ 解 答 例

教科・科目名	数 学 **M3**（前期日程試験：令和６年度）
$\boxed{\textbf{1}}$	(1) $y_2 = \dfrac{1}{3}$ (2) $y_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ (3) $S_n = \dfrac{2\sqrt{3}}{3^{2n}}$ (4) $m = 5$
$\boxed{\textbf{2}}$	(1) $x^2 - 2y$ (2) $x^3 - 3xy + 3z$ (3) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$ (4) 略
$\boxed{\textbf{3}}$	(1) $h'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ (2) 略 (3) $\dfrac{1}{3}$ (4) $\dfrac{\pi}{15} - \dfrac{2}{\pi^3}$
$\boxed{\textbf{4}}$	(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{1-s}\vec{b}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = -\dfrac{t}{s-t}\vec{b} + \dfrac{s}{s-t}\vec{c}$ (3) 略

採点・評価基準（具体的基準）

教科・科目名	**数 学　M3（前期日程試験：令和６年度）**
実施学部 学科（課程）等	理学部（数学科）
出題のねらい	$\boxed{\mathbf{1}}$　平面図形や数列および対数に関する基本的な性質を理解しているか。 $\boxed{\mathbf{2}}$　因数分解や証明ができるか。 $\boxed{\mathbf{3}}$　微分・積分に関する基本を理解し，図形の面積や回転体の体積を求めることができるか。 $\boxed{\mathbf{4}}$　空間内のベクトルに関する基本的な性質を理解しているか。
採点基準	$\boxed{\mathbf{1}}$　配点 25 % $\boxed{\mathbf{2}}$　配点 25 % $\boxed{\mathbf{3}}$　配点 25 % $\boxed{\mathbf{4}}$　配点 25 %