

2025年度

M B

数 学

3月12日(水)

理 学 部 (数学科)

12 : 20 ~ 14 : 50

【後 期 日 程】

#### 注 意 事 項

##### 試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れてはいけません。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(5枚)に受験番号を記入しなさい。

##### 試験開始後

- 3 この問題冊子は、5ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出なさい。
- 4 解答はすべて各問に対応した解答用紙に記入しなさい。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏面へつづく」と明記しなさい。
- 6 問題は、声を出して読むはいけません。
- 7 各問の配点は、比率(%)で表示してあります。

##### 試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰りなさい。

**1** 箱の中に 1, 2, 3, 4, 5, 6 の数字が 1 つずつ書かれた 6 個の球が入っている。この箱から 3 つの球を同時に取り出し、球に書かれている数字を調べてから取り出した 3 つの球を箱に戻す。この試行を 3 回続けて行うとき、次の問いに答えよ。

- (1) 1 回目の試行で取り出される球に書かれている数字の積が 3 の倍数である確率を求めよ。
- (2) 2 回目までの試行で、2 回続けて取り出される球が 1 つもない確率を求めよ。
- (3) 2 回目までの試行で 2 回続けて取り出された球が 1 つであったときに、3 回続けて取り出される球が 1 つもない確率を求めよ。
- (4) 3 回続けて取り出される球が 1 つもない確率を求めよ。

(配点 20 %)

**2**  $\triangle ABC$  において、その内接円の半径を 1 とし、 $BC = \ell$  とする。また、 $\triangle ABC$  の内心を  $I$ 、内接円と辺  $BC$ 、辺  $CA$  との接点をそれぞれ  $D$ 、 $E$  とし、 $\angle BID = \alpha$ 、 $\angle CIE = \beta$  とする。 $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とするとき、次の問いに答えよ。

(1)  $\ell$  を  $\alpha$ 、 $\beta$  を用いて表せ。

(2)  $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi$  を示せ。

(3)  $x = \tan \alpha$  とおくと、 $S$  を  $x$ 、 $\ell$  を用いて表せ。

(4)  $\ell = 2(2 + \sqrt{3})$  の場合に、 $S$  が最小となるときの  $\angle ABC$  の大きさを求めよ。

(配点 20 %)

**3**

次の問いに答えよ。

(1)  $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  のとき、 $z^5 + \frac{1}{z^5}$  の値を求めよ。ただし、 $i$  は虚数単位を表す。

(2)  $n$  を正の整数とし、 $\theta$  を実数とする。複素数  $w$  が  $w + \frac{1}{w} = 2\cos\theta$  を満たすとき、 $w^n + \frac{1}{w^n}$  を  $n, \theta$  を用いて表せ。

(3)  $\theta$  を実数とするとき、次の 2 つの等式が成り立つことをそれぞれ示せ。

$$4\cos^3\theta = \cos 3\theta + 3\cos\theta, \quad 16\cos^5\theta = \cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta$$

(4)  $\cos^2 \frac{\pi}{10}$  の値を求めよ。

(配点 20 %)

**4**  $\triangle ABC$  の外心を  $O$ , 垂心を  $H$  とし,  $O \neq H$  とする。また,  $\triangle ABC$  の外接円の半径を  $R$ , 線分  $OH$  の長さを  $\ell$  とする。点  $P$  が  $\triangle ABC$  の外接円上を動くとき, 次の問いに答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$  であることを示せ。
- (2)  $s, t$  は定数とする。 $\overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{OH} + t\overrightarrow{OP}$  を満たす点  $Q$  の軌跡について, 点  $P$  が  $\triangle ABC$  の頂点にあるとき, 点  $Q$  はその頂点に向かい合う辺の中点にあるとする。このとき,  $s, t$  の値をそれぞれ求めよ。また, 点  $Q$  の軌跡を求めよ。
- (3) ベクトル  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP}$  の大きさの最小値を  $R, \ell$  を用いて表せ。また, 最小となるときの  $\overrightarrow{OP}$  を  $R, \ell, \overrightarrow{OH}$  を用いて表せ。

(配点 20 %)

**5** 関数  $f(t) = \int_0^t e^{-x^2} dx$  ( $t \geq 0$ ) について、次の問いに答えよ。

(1)  $t > 0$  とし、 $n$  を正の整数とする。このとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{t}{n} \sum_{k=1}^n e^{-\left(\frac{k}{n}t\right)^2} \leq f(t) \leq \frac{t}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\left(\frac{k}{n}t\right)^2}$$

(2)  $R > 0$  とする。このとき、すべての実数  $x$  について、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{e^{-(1+x^2)R^2}}{1+x^2} \leq e^{-R^2}$$

(3)  $R > 0$  とし、 $n$  を正の整数とする。このとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} - e^{-R^2} \leq 2 \int_0^R f(t) f'(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

(4) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$  を求めよ。

(5) 極限值  $\lim_{R \rightarrow \infty} f(R)$  を求めよ。

(配点 20 %)

# 正解・解答例

| 教科・科目名 | 数 学 MB（後期日程試験：令和7年度）                                                                                                                                                                  |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1      | (1) $\frac{4}{5}$<br>(2) $\frac{1}{20}$<br>(3) $\frac{1}{2}$<br>(4) $\frac{147}{400}$                                                                                                 |
| 2      | (1) $\tan \alpha + \tan \beta$<br>(2) 略<br>(3) $\ell \left\{ 1 + \frac{1}{x(\ell - x) - 1} \right\}$<br>(4) $\frac{\pi}{6}$                                                           |
| 3      | (1) 1<br>(2) $2 \cos n\theta$<br>(3) 略<br>(4) $\frac{5 + \sqrt{5}}{8}$                                                                                                                |
| 4      | (1) 略<br>(2) $s = \frac{1}{2}, t = -\frac{1}{2}$<br>点 Q の軌跡は、線分 OH の中点を中心とする半径 $\frac{R}{2}$ の円<br>(3) $\overrightarrow{OP} = \frac{R}{\ell} \overrightarrow{OH}$ のとき、最小値 $3R - \ell$ |
| 5      | (1) 略<br>(2) 略<br>(3) 略<br>(4) $\frac{\pi}{4}$<br>(5) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$                                                                                                          |

## 採点・評価基準（具体的基準）

|                 |                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 教科・科目名          | 数 学 MB（後期日程試験：令和 7 年度）                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 実施学部<br>学科（課程）等 | 理学部（数学科）                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 出題のねらい          | <div> <div>1</div> 確率に関する性質を理解しているか。 </div> <div> <div>2</div> 平面図形や三角関数に関する性質を理解しているか。 </div> <div> <div>3</div> 複素数や三角関数に関する性質を理解しているか。 </div> <div> <div>4</div> ベクトルに関する性質を理解し，平面図形に関する問題を解くことができるか。 </div> <div> <div>5</div> 微分・積分の性質を理解し，極限に関する問題を解くことができるか。 </div> |
| 採点基準            | <div> <div>1</div> 配点 20 % </div> <div> <div>2</div> 配点 20 % </div> <div> <div>3</div> 配点 20 % </div> <div> <div>4</div> 配点 20 % </div> <div> <div>5</div> 配点 20 % </div>                                                                                                  |