2025年度

M３　数　学

2月25日(火)
【前 期 日 程】　理　学　部（数学科）　9：50～11：50

注 意 事 項

試験開始前

1　監督者の指示があるまで，問題冊子，解答用紙に手を触れてはいけません。

2　監督者の指示に従って，全部の解答用紙（４枚）に受験番号を記入しなさい。

試験開始後

3　この問題冊子は，４ページあります。はじめに，問題冊子，解答用紙を確かめ，枚数の不足や，印刷の不鮮明なもの，ページの落丁・乱丁があった場合は，手をあげて監督者に申し出なさい。

4　解答はすべて各問に対応した解答用紙に記入しなさい。

5　解答スペースが不足するときは，解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし，その場合は，表面に「裏面へつづく」と明記しなさい。

6　問題は，声を出して読んではいけません。

7　各問の配点は，比率(%)で表示してあります。

試験終了後

8　問題冊子は，必ず持ち帰りなさい。

1 正の整数 n に対して，$f(x) = e^x(1-e^x)^n$ とする。ただし，e は自然対数の底である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $x < 0$ において $f(x)$ はただ 1 つの極値をとることを示し，その極値および極値をとる x の値を n を用いて表せ。

(2) (1) で求めた極値をとる x の値を a_n とする。$t = 1 - e^x$ とおくことで，定積分 $\displaystyle\int_{a_n}^{0} f(x)\,dx$ の値を n を用いて表せ。

(3) (2) で定めた a_n に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)\int_{a_n}^{0} f(x)\,dx$ を求めよ。

（配点 25 %）

$\boxed{2}$ 複素数平面において，2点 α，β は異なる点とし，$0 < \arg(\beta - \alpha) < \dfrac{\pi}{2}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 α を通り実軸と平行な直線を ℓ_1 とし，点 α を通り虚軸と平行な直線を ℓ_2 とする。また，直線 ℓ_1 に関して点 β と対称な点を γ とし，直線 ℓ_2 に関して点 β と対称な点を δ とする。このとき，次の (i)，(ii) に答えよ。ただし，2直線が一致する場合も2直線は平行であると考えることにする。

(i) γ を α，β を用いて表せ。

(ii) δ を α，β を用いて表せ。

(2) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とし，$\arg(z - \alpha) = \theta$ を満たす点 z を1つとり，点 z と点 α を通る直線を ℓ とする。また，直線 ℓ に関して点 β と対称な点を w とする。このとき，次の (i)，(ii) に答えよ。ただし，点 γ，δ は (1) で与えられた点とする。

(i) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{\gamma - w}{\delta - w}$ を θ を用いて表せ。

(ii) θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，点 w の全体はどのような図形か。

（配点 25 %）

$\boxed{3}$ $\triangle$OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ とする。また，辺 OA を $s:(1-s)$，辺 OB を $t:(1-t)$，辺 AB を $u:(1-u)$ に内分する点をそれぞれ P, Q, R とする。ただし，$0<s<1$，$0<t<1$，$0<u<1$ とする。さらに，線分 PQ と線分 OR の交点を X とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 線分 OR の長さを u を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，s，t，u を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直であるとき，次の (i)，(ii) に答えよ。

(i) u の値を求めよ。

(ii) $st=\dfrac{1}{8}$ であるとき，線分 OX の長さが最大となる s，t の値およびそのときの線分 OX の長さをそれぞれ求めよ。

（配点 25 %）

4 nを正の整数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) aを0でも1でもない実数とする。このとき，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1} = \frac{na^{n+1}-(n+1)a^{n}+1}{(a-1)^{2}}$$

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} < 4$$

(3) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^{2k-1}} < \frac{10}{9}$$

（配点 25 %）

正 解 ・ 解 答 例

教科・科目名	数 学 **M3**（前期日程試験：令和 **7** 年度）
1	（1） $x=\log\dfrac{1}{n+1}$ のとき，極大値 $\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ （2） $\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}$ （3） $\dfrac{1}{e}$
2	（1）（i） $\gamma=\alpha+\overline{\beta}-\overline{\alpha}$ （ii） $\delta=\alpha+\overline{\alpha}-\overline{\beta}$ （2）（i） $\dfrac{\gamma-w}{\delta-w}=i\tan\theta$ （ii） 略
3	（1） $\sqrt{3u^2-4u+3}$ （2） $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\dfrac{st(1-u)}{t(1-u)+su}\vec{a}+\dfrac{stu}{t(1-u)+su}\vec{b}$ （3）（i） $\dfrac{2}{3}$ （ii） $s=\dfrac{1}{4}$, $t=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$
4	（1） 略 （2） 略 （3） 略

採点・評価基準（具体的基準）

教科・科目名	**数 学　M3（前期日程試験：令和 7 年度）**
実施学部 学科（課程）等	理学部（数学科）
出題のねらい	$\boxed{\mathbf{1}}$　微分・積分に関する性質を理解し，極限を求めることができるか。 $\boxed{\mathbf{2}}$　複素数や三角関数に関する性質を理解し，複素数平面における図形の問題を解くことができるか。 $\boxed{\mathbf{3}}$　ベクトルに関する性質を理解し，平面図形の問題を解くことができるか。 $\boxed{\mathbf{4}}$　数列に関する性質を理解し，不等式を証明することができるか。
採点基準	$\boxed{\mathbf{1}}$　配点 25 % $\boxed{\mathbf{2}}$　配点 25 % $\boxed{\mathbf{3}}$　配点 25 % $\boxed{\mathbf{4}}$　配点 25 %