2026年度

ＭＢ　数　　学

3月12日（木）
【後 期 日 程】
理　　学　　部（数学科）　　12：20～14：20

注 意 事 項

試験開始前

1 監督者の指示があるまで，問題冊子，解答用紙に手を触れてはいけません。

2 監督者の指示に従って，全部の解答用紙（４枚）に受験番号を記入しなさい。

試験開始後

3 この問題冊子は，４ページあります。はじめに，問題冊子，解答用紙を確かめ，枚数の不足や，印刷の不鮮明なもの，ページの落丁・乱丁があった場合は，手をあげて監督者に申し出なさい。

4 解答はすべて各問に対応した解答用紙に記入しなさい。

5 解答スペースが不足するときは，解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし，その場合は，裏面の指示に従い，続きを書き始めなさい。

6 問題は，声を出して読んではいけません。

7 各問の配点は，比率(％)で表示してあります。

試験終了後

8 問題冊子は，必ず持ち帰りなさい。

1 n を自然数とする。1 個のさいころを n 回投げるとき，出る目すべての積を 5 で割った余りが，1 である確率，0 である確率，2，3，4 のいずれかである確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) b_n を n を用いて表せ。

(2) 1 個のさいころを $(n+1)$ 回投げるとき，n 回までに出る目すべての積を 5 で割った余りが 2 であったときに，$(n+1)$ 回までに出る目すべての積を 5 で割った余りが 1 である確率を求めよ。

(3) a_{n+1} を a_n，c_n を用いて表せ。

(4) $d_n = 6^n a_n$ とおくとき，d_{n+1} と d_n の関係式を求めよ。

(5) a_n を n を用いて表せ。

（配点 25 %）

2 x を正の実数とする。$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{AB} = 1$，$\mathrm{AC} = \mathrm{BC} = x$ である四面体 OABC において，点 C から平面 OAB に垂線 CH を下ろす。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，内積 $\vec{a}\cdot\vec{c}$ と $\vec{b}\cdot\vec{c}$ をそれぞれ x を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，x を用いて表せ。

(3) 点 H が $\triangle\mathrm{OAB}$ の周または内部にあるような x のとりうる値の範囲を求めよ。

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|$ を x を用いて表せ。

(5) 点 H が $\triangle\mathrm{OAB}$ の周または内部にある四面体 OABC のうち，体積が最大となる x の値を求めよ。また，そのときの体積を求めよ。

（配点 25 %）

3 次の問いに答えよ。

(1) n を自然数とする。$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, dt$$

(2) n を自然数とする。$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$\left| \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, dt \right| \leqq \frac{1}{n+1}$$

(3) n を自然数とするとき，次の等式を証明せよ。

$$\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2} = 24\left\{ \frac{(-1)^{2n}}{2n} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \right\} + 6\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right)$$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ の値を求めよ。

（配点 25 %）

4 $0 < \theta_0 < 2\pi$ とし，複素数平面上で，点 z は点 2 を中心とする半径 1 の円の $0 \leqq \theta \leqq \theta_0$ の部分を動くとする。ただし，$\theta = \arg(z-2)$ である。このとき，$w = z^2 - 3z + 3$ で表される点 w が描く曲線を C とする。また，$\theta = \theta_0$ のとき，点 w は点 i と一致するとする。ただし，i は虚数単位である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) w の実部と虚部を θ を用いて表せ。

(2) θ_0 の値を求めよ。

(3) $\dfrac{w}{z-2}$ と $\dfrac{w-z}{w}$ をそれぞれ θ を用いて表せ。

(4) 曲線 C と実軸，および虚軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

（配点 25 %）