2018年度

MB　数学

3月12日（月）
【後期日程】　理　学　部（数学科）　9：30～12：00

注意事項

試験開始前

1　監督者の指示があるまで，問題冊子，解答用紙に手を触れてはいけません。

2　監督者の指示に従って，全部の解答用紙（５枚）に受験番号を記入しなさい。

試験開始後

3　この問題冊子は，５ページあります。はじめに，問題冊子，解答用紙を確かめ，枚数の不足や，印刷の不鮮明なもの，ページの落丁・乱丁があった場合は，手をあげて監督者に申し出なさい。

4　解答はすべて解答用紙に記入しなさい。

5　解答スペースが不足するときは，解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし，その場合は，表面に「裏面へつづく」と明記しなさい。

6　問題は，声を出して読んではいけません。

7　各問の配点は，比率（%）で表示してあります。

試験終了後

8　問題冊子は，必ず持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ Oを原点とする座標平面上の △OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。2点A，Bを通る直線上に点Pを，直線ABと直線OPが直交するようにとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

(2) t を正の数とし，2点A，Bの座標が $\mathrm{A}\left(t, \dfrac{1}{t}\right)$，$\mathrm{B}(t+1, 0)$ と表せるとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| \leqq \sqrt{2}$ となることを示せ。

（配点 20 %）

$\boxed{2}$ $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たす a に対して，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^3 - 3a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

によって定める。このとき，すべての自然数 n に対して，$-1 \leqq a_n \leqq 1$ であることを示せ。

(配点 20 %)

3 微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ が，$f'(x)=g(x)$，$g'(x)=-f(x)$ を満たしている。また，次の条件

$$f(a)=f(b)=0,\quad \text{区間}\ (a,\ b)\ \text{でつねに}\ f(x)\neq 0$$

を満たす実数 $a, b\ (a<b)$ が存在している。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $g(c)=0$，$a<c<b$ を満たす実数 c が存在することを示せ。

(2) $g(c)=0$，$a<c<b$ を満たす実数 c は，ただ1つであることを示せ。

(配点 20 %)

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\int xe^{-x}\,dx$ を求めよ。

(2) (1) の結果を用いて，不定積分 $\int x^2e^{-x}\,dx$ を求めよ。

(3) 次の等式を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=x^3e^{-x}+\int_0^x f(x-t)e^{-t}\,dt$$

(配点 20 %)

5 複素数平面上で $z+\overline{z}=-2$ を満たす点 z の描く図形を B とし，$|z-4|=1$ を満たす点 z の描く図形を C とする。また，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とし，原点と点 α を通る直線を l とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 図形 B と C を図示せよ。

(2) 点 z の直線 l に関して対称な点を表す複素数を z' とする。このとき，$z'=\dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}}\overline{z}$ が成り立つことを示せ。

(3) 図形 B の直線 l に関して対称な図形を B' とする。このとき，B' と C が共有点を持つ θ の値の範囲を求めよ。

(配点 20 %)