2018年度

M 3　数　学

2月25日(日)
【前 期 日 程】　理　学　部 (数学科)　9：30〜11：30

注 意 事 項

試験開始前

1　監督者の指示があるまで，問題冊子，解答用紙に手を触れてはいけません。

2　監督者の指示に従って，全部の解答用紙(４枚)に受験番号を記入しなさい。

試験開始後

3　この問題冊子は，４ページあります。はじめに，問題冊子，解答用紙を確かめ，枚数の不足や，印刷の不鮮明なもの，ページの落丁・乱丁があった場合は，手をあげて監督者に申し出なさい。

4　解答はすべて解答用紙に記入しなさい。

5　解答スペースが不足するときは，解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし，その場合は，表面に「裏へつづく」と明記しなさい。

6　問題は，声を出して読んではいけません。

7　各問の配点は，比率(%)で表示してあります。

試験終了後

8　問題冊子は，必ず持ち帰りなさい。

1 自然数 k に対して，分母が $2k+1$，分子が k 以下の自然数の平方からなる分数を考える。このような分数を，分母の小さい順に，分母が同じ場合には分子の大きい順に並べてできる数列を作り，下のように群に分ける。

$$\underset{\text{第1群}}{\frac{1}{3}} \;\Big|\; \underset{\text{第2群}}{\frac{4}{5},\ \frac{1}{5}} \;\Big|\; \underset{\text{第3群}}{\frac{9}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{1}{7}} \;\Big|\; \underset{\text{第4群}}{\frac{16}{9},\ \frac{9}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{1}{9}} \;\Big|\; \underset{\text{第5群}}{\frac{25}{11},\ \frac{16}{11},\ \frac{9}{11},\ \frac{4}{11},\ \frac{1}{11}} \;\Big|\; \frac{36}{13},\ \frac{25}{13},\ \cdots\cdots$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 第 n 群の最初の項を n を用いて表せ。

(2) $\dfrac{36}{23}$ が第何項になるかを求めよ。

(3) 第 n 群の項の総和を S_n とする。このとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k$ の値 S を n を用いて表せ。

(4) 初項から第 376 項までの和を求めよ。

(配点 25 %)

2 平面上の 3 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が

$$|\vec{a}| = \sqrt{p}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{q}, \quad |\vec{c}| = \sqrt{p+q}, \quad \vec{a}\cdot\vec{c} = p, \quad \vec{b}\cdot\vec{c} = q$$

を満たしている。ただし，p, q は正の数で $p \neq q$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないことを示せ。

(2) $\vec{c}$ を $\vec{a}, \vec{b}, p, q$ を用いて表せ。

(配点 25 %)

3 座標平面上で，曲線 $y=-x^2+1\ (0 \leqq x \leqq 1)$ を C とする。実数 a, b を定数とする 2 次関数

$$y=2x^2+ax+b \quad \cdots\cdots ①$$

について，次の問いに答えよ。

(1) ① のグラフが曲線 C と共有点を 2 点持つとき，a, b が満たす条件を求めよ。

(2) a, b が (1) で求めた条件を満たすとき，① のグラフの頂点が描く図形を座標平面上に図示せよ。

(3) (2) で求めた図形の境界線で囲まれた領域のうち $y \geqq 0$ の部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

（配点 25 %）

4 $x \geqq 0$ の範囲で，関数

$$f_n(x) = e^x - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f_2(x) \geqq 0$ であることを示せ。

(2) すべての自然数 n に対して，$f_n(x) \geqq 0$ であることを示せ。

(3) $f_3(x) \leqq x f_2(x)$ が成り立つことを示せ。

(4) $0 \leqq x < 1$ を満たす x について，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1$ が成り立つことを示せ。

(配点 25 %)