2019年度

M３　　　　数　　学

2月25日（月）
【前 期 日 程】
理　学　部（数学科）　　9：30～11：30

注 意 事 項

試験開始前

1 監督者の指示があるまで，問題冊子，解答用紙に手を触れてはいけません。

2 監督者の指示に従って，全部の解答用紙（５枚）に受験番号を記入しなさい。

試験開始後

3 この問題冊子は，４ページあります。はじめに，問題冊子，解答用紙を確かめ，枚数の不足や，印刷の不鮮明なもの，ページの落丁・乱丁があった場合は，手をあげて監督者に申し出なさい。

4 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。

5 解答スペースが不足するときは，解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし，その場合は，表面に「裏へつづく」と明記しなさい。

6 問題 $\boxed{4}$ の解答用紙は，数学解答用紙（その４）および（その５）の２枚です。

7 問題は，声を出して読んではいけません。

8 各問の配点は，比率（%）で表示してあります。

試験終了後

9 問題冊子は，必ず持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 2,\ \ a_{n+1} = {a_n}^3 4^n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とするとき，b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(2) α, β を定数とし $f(n) = \alpha n + \beta$ とする。このとき，$b_{n+1} - f(n+1) = 3\{b_n - f(n)\}$ が成り立つように α, β を定めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

(配点 25 %)

$\boxed{2}$ $f(x) = e^x \sin x$, $g(x) = a \sin x$ とする。ただし a は 0 以上の実数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) b を定数とし

$$I = \int_0^b e^{2x} \cos 2x dx, \quad J = \int_0^b e^{2x} \sin 2x dx$$

とおく。このとき，

$$I + J = \frac{1}{2}e^{2b} \sin 2b, \quad I - J = \frac{1}{2}(e^{2b} \cos 2b - 1)$$

が成り立つことを示し，I と J を求めよ。

(2) $f(x) = g(x)$ を満たす正の実数 x のうち最小のものを求めよ。

(3) (2) で求めた実数を x_0 とする。$0 \leqq x \leqq x_0$ の範囲で 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 $V(a)$ を求めよ。

（配点 25 %）

$\boxed{3}$ $\vec{c_1} = (1, 2)$, $\vec{c_2} = (5, 4)$ を xy 平面上の原点を始点とする位置ベクトルとし，C_1, C_2 をそれぞれベクトル方程式 $|\vec{p} - \vec{c_1}| = 2$, $|\vec{p} - \vec{c_2}| = 2$ で与えられた円とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 円 C_1 の中心と円 C_2 の中心を通る直線 ℓ のベクトル方程式を求めよ。

(2) 円 C_1 と円 C_2 の両方に接する直線のうち ℓ と平行であるものは 2 本ある。それらの直線と C_1 との接点を求めよ。

(3) 円 C_1 と円 C_2 の両方に接する直線のうち ℓ と平行でないものは 2 本ある。それらの直線のうち方向ベクトルが $(0, 1)$ でないものを m とする。このとき m と C_1 との接点および m の方向ベクトルを求めよ。

（配点 25 %）

$\boxed{4}$ a, b, c を 0 から 9 までの整数とし，整数 $n = 100a + 10b + c$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) n が 7 の倍数であるための必要十分条件は $10a + b - 2c$ が 7 の倍数であることを示せ。

(2) $a \neq b$, $a = c$ であるとき，n が 7 の倍数となるような a と b の組は何通りあるか。

(3) $a = b$, $a \neq c$ であるとき，n が 7 の倍数となるような a と c の組は何通りあるか。

(4) $\boxed{0}$ から $\boxed{9}$ までの 10 枚のカードの中から，無作為に 3 枚を選んで並べて数を表すことにする。例えば $\boxed{8}\boxed{3}\boxed{1}$ は 831 とし，$\boxed{0}\boxed{4}\boxed{9}$ は 49 とする。並べた数 $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}$ が 7 の倍数である確率を求めよ。

（配点 25 %）