

2020年度

**M 3**

**数 学**

2月25日(火) 理 学 部 (数学科)  
【前期日程】

9 : 50 ~ 11 : 50

#### 注 意 事 項

##### 試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れてはいけません。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(4枚)に受験番号を記入しなさい。

##### 試験開始後

- 3 この問題冊子は、4ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出なさい。
- 4 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏へつづく」と明記しなさい。
- 6 問題は、声を出して読んではいけません。
- 7 各問の配点は、比率(%)で表示してあります。

##### 試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰りなさい。

**1** 男子 15 人，女子 13 人のあわせて 28 人のクラスから 4 人の委員を次の手順で選ぶ。

**手順 1** 最初に 28 人の中からくじ引きで 3 人の委員を選ぶ。

**手順 2** 手順 1 の結果，男子 3 人が委員に選ばれた場合，残りの 1 人の委員を女子の中からくじ引きで選ぶ。手順 1 の結果，女子 3 人が委員に選ばれた場合，残りの 1 人の委員を男子の中からくじ引きで選ぶ。手順 1 の結果，男子 2 人と女子 1 人，または男子 1 人と女子 2 人が委員に選ばれた場合，残りの 1 人の委員をまだ委員に選ばれていない 25 人の中からくじ引きで選ぶ。

このとき，次の問いに答えよ。

- (1) 男子 3 人，女子 1 人が委員に選ばれる確率を求めよ。
- (2) 男子 2 人，女子 2 人が委員に選ばれる確率を求めよ。
- (3) 男子 1 人，女子 3 人が委員に選ばれる確率を求めよ。
- (4) 男子 2 人，女子 2 人が委員に選ばれ，かつこの委員の中にクラスの特定の男子 1 名「静岡太郎」が含まれている確率を求めよ。

(配点 25 %)

2 以上の自然数  $n$  に対して,

$$a_n = \frac{1}{2^n} \tan \frac{\pi}{2^n}$$

とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1)  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  のとき、等式

$$\frac{2}{\tan x} = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} - \tan \frac{x}{2}$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) 等式

$$\sum_{i=2}^n a_i = \frac{1}{2^n \tan \frac{\pi}{2^n}}$$

が成り立つことを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) 無限級数  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$  の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

(配点 25 %)

**3** 次の問いに答えよ。ただし、 $e$  は自然対数の底を表す。

(1) 曲線  $y = \log x$  と  $x$  軸および直線  $x = e^2$  で囲まれた図形の面積を求めよ。

(2) (1) の図形を  $x$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

(3) 関数  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}$  の導関数を求めよ。

(4) 曲線  $y = \log x$  ( $\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{2}$ ) の長さを求めよ。

(配点 25 %)

4  $a, b, c$  を実数の定数とし, 関数

$$f(x) = \frac{x+a}{ax-1}, \quad g(x) = \frac{x-b}{bx+1}, \quad h(x) = \frac{x-c}{cx+1}$$

を考える。このとき, 次の問いに答えよ。ただし, 一般に関数  $f(x)$  に対して

$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x)))$$

とする。また, 2つの関数  $f(x)$  と  $g(x)$  の値が共に定義されるすべての  $x$  において等しいとき,  $f(x) = g(x)$  で表す。

(1)  $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$  であることを証明せよ。

(2)  $f(x) = g(x)$  を満たす実数  $a, b$  の組は存在しないことを証明せよ。

(3)  $g(x) = \frac{(\cos \theta)x - \sin \theta}{(\sin \theta)x + \cos \theta}$  となる実数  $\theta$  が  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲でただ1つ存在することを証明せよ。

(4) 各実数  $c$  に対して,  $(g \circ g \circ g)(x) = h(x)$  を満たす実数  $b$  が存在することを証明せよ。

(配点 25 %)